

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Дискретный анализ. Продвинутый поток
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 09.02.2022

Аннотация

Изучение дисциплины подготовит слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области комбинаторных задач прикладной математики, физики и экономики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- изучение математических основ современной комбинаторики, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области комбинаторных задач прикладной математики, физики и экономики.

Задачи дисциплины

- изучение математических основ современной комбинаторики;
- приобретение слушателями теоретических знаний в области комбинаторного анализа задач, возникающих на практике;
- освоение аналитического и алгебраического аппарата дискретной математики и получение навыков работы с основными дискретными структурами.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Комбинаторика	5	5		3
2	Графы и теория графов	4	4		3
3	Логика высказываний и предикатов	4	4		6
4	Булевы функции и алгебра Буля	4	4		6
5	Динамическое программирование и рекурсивные алгоритмы	5	5		3
6	Модели вычислений и сложность	4	4		6
7	Рандомизированные алгоритмы и вероятностные методы	4	4		3
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Комбинаторика

Основные понятия комбинаторики (перестановки, сочетания, размещения). Метод производящих функций. Рекуррентные соотношения и методы их решения. Принцип включения-исключения. Теорема Пойа о подсчёте симметричных объектов.

2. Графы и теория графов

Свойства деревьев и алгоритмы обхода дерева. Планарность графов и теоремы Эйлера и Куратовского. Потоки в сетях и алгоритм Форда-Фалкерсона. Алгоритмы поиска кратчайших путей (Алгоритм Дейкстры, Беллмана-Форда, Флойда-Уоршелла). Вершинная раскраска графа и её приложения

3. Логика высказываний и предикатов

Формальные языки и грамматики. Методы доказательства истинности формул. Нормальные формы булевых выражений (ДНФ, КНФ, СКНФ). Применение методов пропозициональной логики в вычислительных системах. Предикатная логика первого порядка и её аксиоматизация

4. Булевы функции и алгебра Буля

Представление булевых функций полиномами Жегалкина. Минимизация булевых функций методами карт Карно и Квайн-МакКласки. Понятие сложности схемы и сети контактных схем. Задача синтеза минимальных контактных схем и построение оптимальных форм представления

5. Динамическое программирование и рекурсивные алгоритмы

Общие принципы динамического программирования. Решение классических задач оптимизации (задача о рюкзаке, задача коммивояжера). Эффективное решение рекуррентных уравнений методом мемоизации. Разработка быстрых решений NP-полных задач путём динамических подходов

6. Модели вычислений и сложность

Машины Тьюринга и модели RAM-машины. Анализ временной и пространственной сложности алгоритмов. Асимптотические оценки. Класс P, класс NP и проблема равенства классов $P=NP$.

NP-трудные и NP-полнотные задачи и способы приближённого решения

7. Рандомизированные алгоритмы и вероятностные методы

Базовые концепции теории вероятности применительно к дискретному анализу. Примеры случайных процессов и цепей Маркова. Монте-Карло метод и его применение в анализе сложных структур. Использование рандомизации для разработки эффективных алгоритмов сортировки, поиска и оптимизации

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Вероятность и алгебра в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., стереотип. — М. : МЦНМО, 2010 .— 48 с.
2. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— 2-е изд., доп. — М. : МЦНМО, 2007 .— 144 с.
3. Комбинаторика [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Н. Я. Виленкин .— М. : Наука, 1969 .— 328 с.

Дополнительная литература

1. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984 .— 295 с.

2. Алгебра [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / С. Ленг ; пер. с англ. Е. С. Голда ; под ред. А. И. Кострикина .— М. : Мир, 1968 .— 564 с.
3. Шень А. Математическая индукция. М.; МЦНМО. 2016
4. Канель-Белов А.Я.; Ковальджи А.К.. Как решают нестандартные задачи. М.; МЦНМО, 2016

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не предусмотрено.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: АІ360: Передовые методы искусственного интеллекта
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.М. Райгородский, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретный анализ. Продвинутый поток (ФПМИ)» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории части дискретной математики;
- современные проблемы соответствующих разделов дискретной математики;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач дискретной математики.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов;
- предметным языком дискретной математики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Задачи для дифференцированного зачета:

Задача 1. Комбинаторика

Для заданного натурального числа n найдите количество способов представить его в виде суммы двух квадратов целых чисел (не обязательно положительных).

Задача 2. Теория графов

Дан связный взвешенный граф. Требуется построить минимальное остовное дерево (дерево наименьшей суммарной длины рёбер) одним из известных алгоритмов (Прима или Краскала).

Задача 3. Логика высказываний

Докажите эквивалентность двух приведённых ниже утверждений средствами пропозициональной логики: «Если A , то B , и если не A , то C » и «Из A или C следует B ».

Задача 4. Минимизация булевых функций

Предложенная булева функция имеет вид $f(x_1, x_2, x_3)$. Нужно минимизировать её двумя различными методами: картой Карно и квайн-маккласским методом.

Задача 5. Динамическое программирование

Имеется прямоугольная таблица размера $m \times n$, заполненная числами. Из левой верхней клетки разрешается двигаться только направо или вниз. Необходимо определить максимальную возможную сумму чисел, которую можно собрать, двигаясь к правой нижней клетке таблицы.

Задача 6. Асимптотический анализ

Требуется показать, что величина логарифма факториала числа ($\log(n!)$) растёт примерно пропорционально произведению самого числа на его логарифм ($n \log n$). Для обоснования используйте оценку Стирлинга.

Задача 7. Топологическая сортировка

Вам дан ориентированный ациклический граф, вершины которого обозначают взаимосвязанные проекты. Требуется выстроить упорядоченную последовательность проектов таким образом, чтобы зависимость выполнялась.

Задача 8. NP-полные задачи

Необходимо доказать, что задача покрытия множества относится к классу NP-полных задач, сведением к какой-либо известной NP-полной задаче.

Задача 9. Вероятностная задача

Монету бросили N раз подряд. Какова вероятность того, что среди результатов получится одна серия, состоящая минимум из трёх последовательных выпадений одной стороны монеты?

Примерный перечень вопросов к экзамену:

1. Что такое бинарное отношение? Приведите примеры рефлексивных, транзитивных и антисимметричных отношений.
2. Какие типы комбинаторных задач существуют? Приведите формулы для перестановок, размещений и сочетаний с повторениями и без.
3. Объясните принцип включений–исключений и решите с его использованием типичную комбинаторную задачу.
4. Опишите понятие производящей функции и укажите её роль в комбинаторике.
5. Какой смысл имеют полиномы Жегалкина и как они используются для упрощения булевых функций?

6. Что означает минимальная форма записи булевой функции? Назовите известные методы минимизации.
7. Охарактеризуйте основные свойства графа. Чем отличаются планарные и непланарные графы?
8. Как формулируется теорема Эйлера относительно планарных графов? Приведите доказательство.
9. Как работает алгоритм Краскала построения минимального остовного дерева?
10. Каково назначение алгоритма Форда-Фалкерсона и как он применяется для определения максимальных потоков в сетевом графе?
11. Почему цикл Эйлера важен в теории графов? Укажите необходимые условия существования эйлеровых циклов.
12. В чём суть метода ДП («динамического программирования») и как он используется для эффективного решения некоторых задач дискретного анализа?
13. Что представляет собой задача "о рюкзаке"? Рассмотрите два варианта постановки: с целыми значениями и дробными.
14. Докажите основную теорему теории вероятностей (формулу полной вероятности) и покажите её использование на примере.
15. Расскажите о классе P и классе NP. Почему считается важной гипотеза $P \neq NP$?
16. По каким признакам определяется принадлежность задачи к классу NP-полных задач? Приведите известный пример такой задачи.
17. Какие подходы применяются для аппроксимационного решения NP-полных задач?
18. Дайте определение логической импликации и логического эквивалента. Покажите, как преобразовать логическое утверждение в нормальную форму.
19. Что такое машина Тьюринга и какую роль она играет в изучении алгоритмической разрешимости задач?
20. Запишите и поясните закон де Моргана в применении к дизъюнктивным и конъюнктивным нормам.
21. В чём состоит базовая идея вероятностных алгоритмов? Когда целесообразно их применение?
22. Что понимается под сложностью алгоритма? Какие классы сложности известны?
23. Какова связь между асимптотическими оценками и эффективностью алгоритмов?
24. Какие ограничения накладываются на задачу разбиения целого числа на части? Приведите методы для эффективной реализации разбиения.
25. Опишите технику топологической сортировки и область её применения.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.